**Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение**

**города Москвы**

**«Школа № 1363»**

Городской конкурс лучших педагогических практик

реализации предпрофессионального образования

Номинация «Инженерный класс»

**ИЗУЧЕНИЕ МАТРИЦ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЗАНЯТИЯХ В ИНЖЕНЕРНЫХ КЛАССАХ**

Соавторы:

Никулочкина Ольга Алексеевна, учитель;

Тимаков Егор Вадимович, учитель.

**Москва, 2022**

**Оглавление**

[Описание работы - 3 -](#_Toc120977057)

[Идея практики - 3 -](#_Toc120977058)

[Цель практики - 3 -](#_Toc120977059)

[Задачи практики - 3 -](#_Toc120977060)

[Этапы реализации - 4 -](#_Toc120977061)

[Методы реализации - 4 -](#_Toc120977062)

[Описание оборудования - 4 -](#_Toc120977063)

[Методические и оценочные материалы - 5 -](#_Toc120977064)

[Методический комментарий - 5 -](#_Toc120977065)

[Использование матриц и определителей для решения школьных задач по математике - 6 -](#_Toc120977066)

[Возможности организации деятельности обучающихся - 10 -](#_Toc120977067)

[Примеры межпредметных задач - 13 -](#_Toc120977068)

[Возможность использования сведений из истории математики - 16 -](#_Toc120977069)

[Полученные результаты - 17 -](#_Toc120977070)

[Практическое значение - 17 -](#_Toc120977071)

[Краткое описание проведённых исследований и опросов - 18 -](#_Toc120977072)

[Перспективы дальнейшего развития - 18 -](#_Toc120977073)

[Трансляция опыта реализации педагогической практики - 18 -](#_Toc120977074)

[Использованная литература - 19 -](#_Toc120977075)

*Приобретение любого познания всегда полезно для ума, ибо он сможет впоследствии отвергнуть бесполезное и сохранить хорошее. Ведь ни одну вещь нельзя ни любить, ни ненавидеть, если сначала ее не познать.*

*Леонардо да Винчи.*

# Описание работы

Преподавание в инженерных классах помимо обязательной программы предполагает проведение специальных курсов (элективных, внеурочной деятельности), различных образовательных марафонов (инженерные каникулы, мастер-классы), межпредметных и метапредметных занятий. В данной работе изложены идеи и представлены материалы, которые могут быть использованы в планировании и подготовке подобных мероприятий. Учителя ГБОУ Школы №1363 применяют их в своей педагогической деятельности, ежегодные результаты подтверждают их эффективность.

# Идея практики

Использовать задания, для поиска ответа в которых возможно применение матриц и определителей, для эффективной организации учебного процесса в инженерных классах.

# Цель практики

Проведение занятий, соответствующих требованиям к профильному обучению.

# Задачи практики

1. демонстрация связи предметов инженерного направления путём решения заданий, отобранных по принципу возможности применения матриц и определителей для поиска ответа;
2. пропедевтика вузовских дисциплин и удовлетворение индивидуальных запросов обучающихся, готовящихся к поступлению;
3. демонстрация роли математического аппарата для решения задач различных дисциплин;
4. изучение методов, которые могут применяться для решения заданий второй части ЕГЭ по математике профильного уровня;
5. использование матриц и определителей для организации такого обобщающего повторения по математике, которое будет интересно ученикам;
6. знакомство старшеклассников с такими понятиями высшей математики, как матрицы и определители.
7. организация занятий, соответствующих современным требованиям.

# Этапы реализации

1. определение формата и сроков мероприятия (учебный курс, мастер-класс, инженерные каникулы и т. д.);
2. определения уровня подготовки обучающихся;
3. определение целей (изучение нового материала, исторический экскурс, решение межпредметных задач и т. д.);
4. отбор содержания и планирование занятий;
5. проведение занятий;
6. анализ достигнутых результатов.

# Методы реализации

Изучение матриц и определителей, а также демонстрация возможности их применения для решения задач различных учебных дисциплин могут быть организованы в следующих формах: специальные курсы (элективные, внеурочная деятельность), различные образовательные марафоны (инженерные каникулы, мастер-классы), межпредметные занятия.

# Описание оборудования

Для достижения указанных целей достаточно стандартного оборудования современного учебного кабинета. Возможно требование наличия специального оборудования для иллюстрации физических или химических процессов, описанных в задачах.

# Методические и оценочные материалы

## Методический комментарий

С точки зрения высшей алгебры, матрицы и определители являются введением в линейную алгебру. В курсе школьной алгебры данные понятия не рассматриваются.

Изучение различных элементов высшей математики в школьном курсе имеет достаточно долгую историю. В различные периоды различные разделы то вводились повсеместно в школьный курс, то оставались только уделом изучения в профильных классах. В настоящее время признано необходимым включение в школьный курс таких элементов высшей математики, как производная, интеграл и теория вероятностей. Мотивацией для этого является наличие большого количества практических моделей.

В школьном курсе алгебры рассматриваются различные способы решения систем линейных уравнений: метод подстановки, метод сложения, графический метод. Возникает вопрос, а существуют ли какие-либо другие способы решения данных систем. Действительно, кроме методов, изучаемых в школе, существуют и другие, доступные для учащихся старших классов методы решения систем линейных уравнений: метод Крамера, метод Гаусса, матричный метод. При применении этих методов встречаются новые понятия: «матрица», «определитель», «минор», «дополнение». Возникает необходимость уметь вычислять определители, миноры, дополнения. При решении систем линейных уравнений методом Гаусса также нужно уметь выполнять преобразования над строками матриц.

Заметим, что курсы, связанные с матрицами, можно изучать после изучения систем линейных уравнений, то есть в восьмом классе. В предлагаемых элективных курсах рассмотрение понятия определителя начинается с введения матриц и действий над ними. Это связано с использованием представления об определителе как о числовой характеристики матрицы. При изучении определителей в школьном курсе вполне допустимо ограничиться малыми размерностями. В таком случае можно рассматривать методы вычисления по правилам, или применять мнемоническую схему (схему Саррюса). Для решения задач основной школы этого вполне достаточно. Предполагается, что при первом знакомстве с определителями школьники узнают методы вычисления для второго и третьего порядков. Мотивацией у школьников к изучению определителей должно быть формирование представления о возможностях решать типовые задачи школьного курса быстрее.

Итак, теория определителей может изучаться в школе как средство решения систем уравнений и аппарат при использовании векторной алгебры. Определители позволяют увеличить скорость решения задач школьниками.

## Использование матриц и определителей для решения школьных задач по математике

Одним из приложений теории определителей является векторная алгебра, которая может применяться для решения большого класса геометрических задач на вычисление углов и расстояний. Следует отметить, что грамотное использование техники вычисления определителей позволяет решать стандартные школьные задачи быстрее, что является важным при прохождении государственной итоговой аттестации.

Так, можно ускорить решение системы, полученной при поиске коэффициентов вектора нормали в уравнении плоскости, с помощью метода Гаусса или метода Крамера. Приведём пример.

Задача. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точки: A (1, 2, 3), B (4, 5, 6), C (7, 8, 9).

Обычно в школе предлагают составить систему уравнений, подставив координаты точек в уравнение плоскости , предварительно выбрав значение (если плоскость не проходит через начло координат, можно выбрать ), и решить её.

Помимо классического решения, учащиеся могут решить систему, используя матрицы. Альтернативным способ – написать требуемое уравнение с помощью определителя:

Одними и самых трудных задач с развернутым ответом на экзамене являются задачи на поиск расстояния между скрещивающимися прямыми. В школьном курсе рассматриваются некоторые способы, которые обычно они связаны с дополнительными построениями и доказательствами. Однако использование векторных и смешанных произведений может помочь ученикам получить верный ответ без этого. Эти темы включены в некоторые учебники по геометрии, в частности, в учебник Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича, который доступен в Библиотеке Московской электронной школы (ID:25178). Также издательством МЦНМО был выпущен учебник А.Ю. Калинина и Д.А. Терешина для углублённого изучения геометрии, который ранее был рекомендован Министерством. В нём мы можем найти следующий способ поиска расстояния между скрещивающимися прямыми.

* Сначала вводим прямоугольную систему координат, ищем координаты трёх векторов: направляющих векторов заданных прямых и вектора связи (вектора с началом и концом на заданных прямых).
* С помощью определителя ищем векторное произведение направляющих векторов и его длину.
* Скалярно умножаем вектор связи на полученный вектор и делим модуль результата на полученную ранее длину.

Даже если ученик не будет использовать этот способ для оформления решения на экзаменационном бланке, то он может проверить полученный результат на правильность. Сформулируем метод в виде алгоритма.

1. Найти координаты направляющих векторов указанных прямых и координаты вектора связи.
2. Найти модуль векторного произведения этих векторов.
3. Найти модуль скалярного произведения вектора связи и векторного произведения направляющих векторов указанных прямых.
4. Разделить результат пункта 3 на результат пункта 2.

Задача. Найти расстояние между скрещивающимися рёбрами единичного тетраэдра.

Решение.

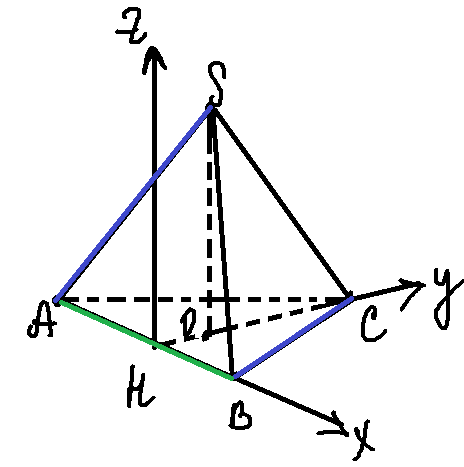


Рис. 1

Введём прямоугольную систему координат таким образом, как показано на рисунке 1, и найдём расстояние между рёбрами и . Определим координаты нужных точек:

Вычислим координаты направляющих векторов прямых, на которых лежат выбранные рёбра, и координаты вектора связи:

Найдём векторное произведение этих векторов:

.

Найдём модуль векторного произведения этих векторов.

.

Вычислим модуль скалярного произведения вектора связи и векторного произведения направляющих векторов указанных прямых:

.

Разделим модуль скалярного произведения вектора связи и векторного произведения направляющих векторов указанных прямых на модуль векторного произведения направляющих векторов исходных прямых.

.

Применение матриц для решения систем линейных уравнений может помочь в решении нестандартных олимпиадных заданий №18 ЕГЭ. Приведём пример.

Задача. Каждое из чисел равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

Известно, что =513.

А) Найдите , если известно, что

Б) Может ли ?

В) Пусть . Найдите все значения, которые может принимать .

Опишем начало решения.

Обозначим – количество единиц, – количество двоек, – количество троек, – количество четвёрок. Тогда

## Возможности организации деятельности обучающихся

Использование матриц позволяет эффективно организовать процесс обобщающего повторения. Так, некоторые задания формата ЕГЭ можно переформулировать при помощи термина определитель. В таблице 1 приведены некоторые примеры.

Таблица 1. Соотнесение формулировок заданий ЕГЭ и заданий, связанных с определителями.

|  |  |
| --- | --- |
| №5. Простейшие уравнения | |
| Решите уравнение  *.* | При каком значении определитель будет равен -9? |
| №6. Вычисления и преобразования. Вычисление значений тригонометрических выражений | |
| Найдите значение выражения ;  найдите значение выражения . | Вычислите . |
| №6. Вычисления и преобразования. Преобразования числовых иррациональных выражений | |
| Найдите значение выражения  ;  найдите значение выражения  . | Вычислите . |
| №6. Вычисления и преобразования. Преобразования числовых логарифмических выражений | |
| Найдите значение выражения ;  найдите значение выражения . | Вычислите . |
| №11. Наибольшее и наименьшее значение функций | |
| Найдите точку минимума функции | При каком значении переменной определитель будет минимально возможным? |

Тематика курса позволяет активно использовать деятельностный подход: можно формулировать задания таким образом, что ученики сами формулируют гипотезы. Приведём примеры.

Задание. Вычислите определители. Что можно заметить? Как друг с другом связаны определители? Сформулируйте гипотезу о свойстве определителя и попробуйте провести доказательство в общем виде для определителей 2х2, 3х3.

А) ;

Б) ;

В) ;

Г) ;

Д) и .

Также достаточно легко организовать работу в группах: вариативность способов позволяет ученикам, работая в группе, формулировать преимущества и недостатки различных методов.

Задание 2. Разделитесь на группы и решите систему уравнений

указанным способом: группа 1 – решение методом сложения, группа 2 – решение методом подстановки, группа 3 – решение методом Гаусса, группа 4 – решение методом Крамера, группа 5 – решение с помощью обратной матрицы.

Одним из эффективных способов развития познавательного интереса учащихся при изучении математике считается метод вариативного решения математических задач, то есть решение задач разными способами. На уроке одной задачи у ученика появляется возможность найти способ решения, то есть способ, который ему понятен, в котором он может максимально выразиться. Решение задачи разными способами помогает восполнить проблемы в ранее изученных темах, побуждает учащихся к поиску различных приемов решения задач.

Задача. В прямоугольном параллелепипеде точка – середина ребра . Найдите объем тетраэдра , если (иллюстрация изображена на рисунке 2).

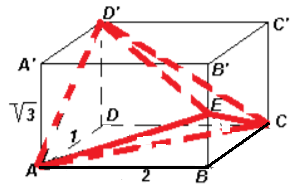


Рис. 2

Приведём некоторые способы решения:

* вычисление объема тетраэдра в виде разности объема параллелепипеда и четырех пирамид;
* введение системы координат и использование формулы расстояния от точки до плоскости;
* представление объема в виде смешанного произведения векторов.

Введение матриц позволяет решить ряд методических вопросов. Тот факт, что переместительный закон умножения не является справедливым для матриц, позволяет проиллюстрировать, что умозаключение, сделанное с помощью аналогии, может быть ошибочным.

Помимо этого, изучение матриц влияет на более глубокое понимание математики. Появляется повод объяснить, что числа 0 и 1 являются нейтральными элементами по сложению и умножению соответственно.

## Примеры межпредметных задач

Математика интенсивно проникает в другие науки: во многом этот процесс происходит благодаря разделению математики на ряд самостоятельных областей. Язык математики универсален, что является объективным отражением универсальности законов окружающего нас мира. Конечно, с уравнениями дети сталкиваются не только на уроках математики. Умение быстро решать системы линейных уравнений может помочь в физике, химии, экономике и не только.

В химии примером могут служить задачи на смеси, сплавы, растворы. Предлагаем условие задачи и начало решения.

Задача. Даны четыре емкости с растворами серной кислоты различной концентрации. Если смешать растворы в определенных соотношениях, то получится кислота заданной концентрации. Определить какова молярная концентрация кислоты в каждом сосуде. Плотность раствора принять равной 1000 кг/ Исходные данные представлены в таблице 2.

Таблица 2. Исходные данные для химической задачи

|  |  |
| --- | --- |
| Соотношение | Конечная концентрация кислоты, % |
| 1:1:1:1 | 13 |
| 4:3:2:1 | 34 |
| 4:1:1:4 | 25 |
| 4:1:4:1 | 25 |

Приведём фрагмент решения. Составим систему линейных уравнений. Через обозначаем неизвестные концентрации растворов серной кислоты в четырех ёмкостях:

Предлагаем рассмотреть задачу по физике.

Задача. Через блок в виде диска, имеющего массу , перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами 100 г и 200 г ( и соответственно). С каким ускорением будут двигаться грузы и каковы силы натяжения нити, если их предоставить самим себе?

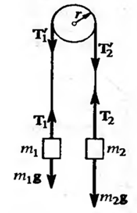


Рис. 3

Применим к решению задачи основные законы поступательного и вращательного движения. Рассмотрим рисунок 3. На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести mg, направленная вниз, и сила Т натяжения нити, направленная вверх. Так как вектор ускорения a груза направлен вверх, то . Равнодействующая этих сил вызывает равноускоренное движение и по второму закону Ньютона Вектор ускорения a груза направлен вниз, следовательно Согласно основному закону динамики вращательного движения, вращательный момент М, приложенный к диску, равен произведению моменту инерции диска на его угловое ускорение , а именно Определим вращательный момент. Силы натяжения нитей действуют не только на грузы, но и на диск. По третьему закону Ньютона силы , приложенные к ободу диска равны соответственно силам силы , но по направлению им противоположны. При движении грузов диск ускоренно вращается по часовой стрелке, следовательно, Вращательный момент, приложенный к диску, равен произведению разности этих сил на плечо, равное радиусу диска, то есть Момент инерции диска , угловое ускорение связано с линейным: . Следовательно: откуда получим . Мы получили систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

Подставим численные значения:

Теперь задача сводится к решению системы линейных уравнений.

Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих экономических задач. Отметим существование ряда экономических задач, приводящих к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений на основе прогноза выпуска продукции по известным запасам сырья. На основе алгебры матриц и аппарате матричного анализа американский экономист В.В. Леонтьев создал математическую модель, которая решает проблему баланса между отдельными отраслями мирового хозяйства.

Задача. С двух заводов поставляются автомобили для двух автохозяйств, потребности которых соответственно 200 и 300 машин. Первый завод выпустил 350 машин, а второй – 150 машин. В таблице 3 приведены затраты на перевозку машин с завода в каждое хозяйство.

Таблица 3. Условие задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Завод | Затраты на перевозку в автохозяйство, денежных единиц | |
| 1 | 2 |
| 1 | 15 | 20 |
| 2 | 8 | 25 |

Минимальные затраты на перевозку равны 7950 денежных единиц. Найдите оптимальный план перевозок машин.

Приведём начало решения. Пусть – количество машин, поставляемых с –ого завода –ому автохозяйству Получаем систему:

## Возможность использования сведений из истории математики

Поскольку выпускники должны иметь представления об истории математики, имеет смысл посвятить время этому вопросу. Есть замечательная возможность познакомить детей с некоторыми фактами из биографий математиков, изучавших матрицы (Габриэль Крамер, Карл Фридрих Гаусс, Уильям Гамильтон, Джеймс Сильвестр, Артур Кэли и др.) и их достижениями. Например, благодаря Гамильтону и Гауссу снят вопрос о непротиворечивости комплексных чисел. Первые матрицы упоминались ещё в Древнем Китае, назывались магическими квадратами. Один из величайших мастеров западноевропейского Ренессанса Альбрехт Дюрер (конец XV – начало XVI века) составил так называемый магический квадрат, изображённый на одной из самых совершенных его гравюр — «Меланхолии». Заслуга Дюрера заключается в том, что он сумел так расположить числа от 1 до 16, что сумма 34 получается не только при их сложении по вертикали, горизонтали и диагонали, но и во всех четырёх четвертях, в центральном четырёхугольнике и даже при сложении чисел из четырёх угловых клеток. Сумма любой пары симметрично расположенных относительно центра квадрата чисел равна 17. Дюрер нашёл место в таблице и для года создания гравюры «Меланхолия» (1514). Известно, что использование исторического материала способствует формированию положительной мотивации к обучению.

В магическом квадрате на рисунке 4 сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях равна 34. На рисунке 5 изображён Ло Шу – магический квадрат 3×3, известный ещё в Древнем Китае. На рисунке 6 приведен магический квадрат 4×4, изображённый на гравюре Альбрехта Дюрера «Меланхолия».

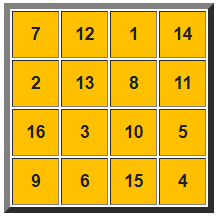
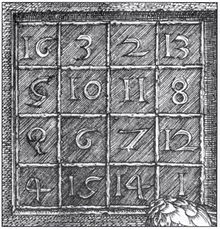
  

Рис. 4 Рис. 5 Рис. 6

# Полученные результаты

В 2019 году школа ГБОУ Школа №1363 стала консультантом городского проекта «Инженерный класс в московской школе» (высокие результаты в области развития прикладных практико-ориентированных умений – одно из условий).

Учитывая результаты ЕГЭ по математике (профильный уровень) и их динамику, в 2022 – 2023 учебном году ГБОУ Школа №1363 стала одним из ресурсных центров по этому предмету.

В 2021 – 2022 учебном году среди выпускников инженерного класса были победитель и призёр Предпрофессиональной олимпиады по инженерно-конструкторскому направлению.

В 2021 – 2022 учебном году 3 ученика инженерного класса стали победителями, ещё 3 – призёрами конкурса «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал».

# Практическое значение

Опыт проведения занятий, на которых обучающиеся решают описанные выше задачи, позволяет утверждать, что они расширяют представления о математических методах и хорошо усваиваются учениками профильных классов. Изучение указанных вопросов способствует формированию абстрактных представлений, развитию логического мышления, осуществлению межпредметных связей.

# Краткое описание проведённых исследований и опросов

Результаты опросов выпускников инженерных классов показывают, что изучение матриц и определителей в период обучения в школе упрощает изучение этих тем в вузах. Ученики, имеющие затруднения с пространственными представлениями, предпочитают решать стереометрические задачи методом координат, в том числе с использованием матриц и определителей (для поиска расстояния между скрещивающимися прямыми, вычисления объёмов).

# Перспективы дальнейшего развития

В ближайшее время планируется составление учебного пособия и пополнение Библиотеки МЭШ контентом указанной тематики.

# Трансляция опыта реализации педагогической практики

В рамках проекта «Школы-консультанты городского проекта "Инженерный класс в московской школе"» проводился мастер-класс «Использование ЭУП "Матрицы и определители" (https://profil.mos.ru/inj/o-proekte/shkoly-konsultanty/shkoly-konsultanty-gorodskogo-proekta-inzhenernyj-klass-v-moskovskoj-shkole/plan-raboty-shkol-konsultantov-na-dekabr-2020-goda.html) на занятиях по математике в инженерных классах» 9.12.2020.

В Библиотеке МЭШ есть одобренные материалы этой тематики одного из авторов работы (ID 193003, ID 192634).

Также на сайте Learningapps.org представлены разработанные приложения:

* <https://learningapps.org/watch?v=p0iwmt3ra20>,
* <https://learningapps.org/watch?v=pxxnr0z7k20>,
* <https://learningapps.org/watch?v=pc92q7o0j20>,
* <https://learningapps.org/watch?v=pauboa09k20>).

# Использованная литература

1. Калинин А.Ю., Д.А. Терёшин. Геометрия. 10 – 11 классы. М.: МЦНМО, 2011. – 640 с.
2. <https://business-portal.ru/doc/g5y0tvj3ht_ask_cr_4193487/> (Ладошкин М.В. Использование элементов матричной и векторной алгебры при обучении математике в школе)
3. <https://uchebnik.mos.ru/material_view/books/25178?menuReferrer=catalogue> (Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. 11 класс. Углубленный уровень)
4. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Магический_квадрат>
5. <https://uchebnik.mos.ru/material_view/lesson_templates/265086?menuReferrer=catalogue> (Токмакова И.В. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми координатно-векторным методом)
6. <https://subscribe.ru/archive/job.student.mathematics/200306/27004321.html>
7. <http://exir.ru/other/chertov/examples/dinamika_vraschatelnogo_dvizheniya_4.htm>
8. <https://www.liveexpert.org/topic/view/2587608-v-pryamougolnom-parallelepipede-tochka-seredina-rebra-najdite-obem-tetraedra-eads-esli-av-ad-aa-koren-iz>
9. https://www.cyberforum.ru/turbo-pascal/thread2164937.html